Date

2009年　東大数学　文系第2問　理系第1問　①

(1)

$_mC_1$, $_mC_2$, $_mC_3$ … $_mC_{m-1}$ ← すべて d_m で割り切れる.

$_mC_1 = m$, $_mC_{m-1} = m$

素数 m が d_m で割り切れるので.
$d_m = 1$ か $d_m = m$ である。

よって. $_mC_1$, $_mC_3$, … $_mC_{m-1}$ が すべて m で割り切れる (m の倍数) ならば $d_m = m$ が示せる。

m が最大公約数だということになるため

ここで. $1 \leqq k \leqq m-1$ となる. すべての自然数 k に対し.

$$_mC_k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$$\underbrace{_mC_k}_{①} = m \times \underbrace{\frac{(m-1)!}{k!(m-k)!}}_{②}$$ である。

以下. ①, ② が整数であることを指摘する。

① $_mC_k$ は. m 個の異なるものから. k 個選ぶ場合の数であるため. 整数である。

② $k!$ と m に関して. $1 \leqq k \leqq m-1$ であり. m は素数であるから. m と $k!$ は互いに素である。

同様に. $(m-k)!$ と m も互いに素である。

よって. $m \times \underbrace{\frac{(m-1)!}{k!(m-k)!}}_{②}$ が整数であるとき.

$\underbrace{\frac{(m-1)!}{k!(m-k)!}}_{②}$ が整数となる。

よって $_mC_k = m \times (整数)$ となるため. $_mC_1$, $_mC_2$ … $_mC_{m-1}$ はすべて m の倍数となり. $d_m = m$ である。

(2)　数学的帰納法により. 証明する。

(i) $k=1$ のとき. $1^m - 1 = 0$ なので. d_m で割り切れる。

(ii) $k = l$ のとき. $l^m - l = N_1 d_m$ となると仮定する。

(iii) $k = l+1$ のとき.

$(l+1)^m - (l+1)$

$= \underbrace{_mC_0 l^m}_{= l^m} + \underbrace{_mC_1 l^{m-1} + {_mC_2} l^{m-2} + \cdots {_mC_{m-1}} l}_{残り} + {_mC_m} (=1) - l - 1$

$= l^m - l + 1 - 1 + \underbrace{_mC_1 l^{m-1} + {_mC_2} l^{m-2} + \cdots {_mC_{m-1}} l}_{残り}$

仮定 ↓

$= N_1 d_m + \underbrace{_mC_1 l^{m-1} + {_mC_2} l^{m-2} + \cdots + {_mC_{m-1}} l}_{d_m の倍数である}$

証明

$_mC_1$, $_mC_2$ … $_mC_{m-1}$ は. 整数 l^{m-1}, l^{m-2}, … l の倍数であり、
定義よりすべて d_m の倍数である。
よって. $_mC_1 l^{m-1} + {_mC_2} l^{m-2} + \cdots + {_mC_{m-1}} l$ も d_m の倍数となる。

よって. $(l+1)^m - (l+1)$ も d_m の倍数となる。

以上より. すべての自然数 k で $k^m - k$ は d_m で割り切れ

2009 東大数学　　文系第2問　理系第1問 ②

理系(3)

(2)より $k^m - k$ は d_m で割り切れるので、

(*) $k^m - k = N_2 d_m$ とおける。 k-1を代入する発想が難しい

また、$(k-1)^m - (k-1)$ も d_m で割り切れるので、

$(k-1)^m - (k-1) = N_3 d_m$ とおける。

$(k-1)^m$ を展開して、

$$\underbrace{{}_mC_0 k^0 (-1)^m}_{=1} + {}_mC_1 k^1 (-1)^{m-1} + \cdots + \underbrace{{}_mC_m k^m (-1)^0}_{=k^m} - (k-1) = N_3 d_m$$

$$1 - {}_mC_1 \cdot k + {}_mC_2 k^2 - \cdots - {}_mC_{m-1} k^{m-1} + k^m - k + 1 = N_3 d_m$$

$$\underbrace{k^m - k}_{(*)\downarrow} + 2 + \left(-{}_mC_1 \cdot k + {}_mC_2 \cdot k^2 \cdots - {}_mC_{m-1} k^{m-1}\right) = N_3 d_m$$

$$N_2 d_m + 2 + \left(-{}_mC_1 \cdot k + {}_mC_2 \cdot k^2 + \cdots \ {}_mC_{m-1} k^{m-1}\right) = N_3 d_m$$

ここで、$k, k^2, \cdots k^{m-1}$ はすべて整数で、

${}_mC_1, {}_mC_2, {}_mC_3 \cdots {}_mC_{m-1}$ は定義よりすべて

d_m の倍数なので、

$-{}_mC_1 k + {}_mC_2 k^2 - \cdots - {}_mC_{m-1} k^{m-1} = N_4 d_m$

とおける。

よって、

$$N_2 d_m + 2 + N_4 d_m = N_3 d_m$$

$$2 = d_m (N_3 - N_2 - N_4)$$

すると、d_m は 2 の約数であるから、

$d_m = 1$ または $d_m = 2$ //